Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371
УДК 51-76, 517.988

О решениях типа «кольцо» уравнений нейронного поля

Рашид АТМАНИЯ[1], **Евгений Олегович БУРЛАКОВ**[2], **Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[1]

[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе исследуется интегро-дифференциальное уравнение с интегральным оператором типа Гаммерштейна следующего вида:

$$\partial_t u(t,x) = -\tau u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \omega(x-y) f(u(t,y))dy, \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Данное уравнение формализует динамику распределения электрических потенциалов $u(t,x)$ в плоской нейронной среде и носит название уравнения нейронного поля. Изучаются решения типа «кольцо», представляющие собой стационарные радиально симметричные решения, отвечающие состоянию активности нейронной среды в некоторой области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, и состоянию покоя нейронного поля за пределами данной области. В работе предлагаются условия существования решений-колец, а также метод их приближенного численного нахождения. Используемые подходы основываются на замене в уравнении нейронного поля вероятностной функции f активации нейронов, имеющей сигмоидальную форму, функцией типа Хевисайда. Теоретическая часть работы сопровождается примером, иллюстрирующим процедуру исследования решений типа «кольцо» уравнения нейронного поля, содержащего типично используемую в математической нейробиологии функцию межнейронной связи, позволяющую учитывать как возбуждающие, так и тормозящие взаимодействия нейронов. Подобно случаю решений-бампов (стационарных решений уравнения нейронного поля, отвечающих активации области нейронного поля, представляющей собой внутренность некоторой окружности), при высоких значениях порога активации нейронов имеет место одновременное существование двух решений — так называемых «широкого кольца» и «узкого кольца», сливающихся вместе при критическом значении порога активации нейронов, при превышении которого решений-колец не существует.

Ключевые слова: двумерное уравнение нейронного поля, решение типа «кольцо», существование решений, приближенное построение решений

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-015-00475_а).

Для цитирования: *Атмания Р., Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* О решениях типа «кольцо» уравнений нейронного поля // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 363–371. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371

On ring solutions of neural field equations

Rachid ATMANIA[1], **Evgenii O. BURLAKOV**[2], **Ivan N. MALKOV**[1]
[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to investigation of integro-differential equation with the Hammerstein integral operator of the following form:

$$\partial_t u(t,x) = -\tau u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \omega(x-y) f(u(t,y))dy, \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^2.$$

The equation describes the dynamics of electrical potentials $u(t,x)$ in a planar neural medium and has the name of neural field equation. We study ring solutions that are represented by stationary radially symmetric solutions corresponding to the active state of the neural medium in between two concentric circles and the rest state elsewhere in the neural field. We suggest conditions of existence of ring solutions as well as a method of their numerical approximation. The approach used relies on the replacement of the probabilistic neuronal activation function f that has sigmoidal shape by a Heaviside-type function. The theory is accompanied by an example illustrating the procedure of investigation of ring solutions of a neural field equation containing a typically used in the neuroscience community neuronal connectivity function that allows taking into account both excitatory and inhibitory interneuronal interactions. Similar to the case of bump solutions (i. e. stationary solutions of neural field equations, which correspond to the activated area in the neural field represented by the interior of some circle) at a high values of the neuronal activation threshold there coexist a broad ring and a narrow ring solutions that merge together at the critical value of the activation threshold, above which there are no ring solutions.

Keywords: two-dimensional neural field equation, ring solution, existence of solutions, approximation of solutions

Mathematics Subject Classification: 45K05, 47H30, 92B99, 33F05.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-015-00475_a).

For citation: Atmania R., Burlakov E.O., Malkov I.N. O resheniyakh tipa «kol'tso» uravneniy neyronnogo polya [On ring solutions of neural field equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 363–371. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В математической нейробиологии большое внимание уделяется изучению стационарных решений уравнений нейронного поля

$$\partial_t u(t,x) = -\tau u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\Xi} \omega(x-y) f(u(t,y))dy, \qquad t \geq 0,\ x \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{0.1}$$

(см., например, библиографию настоящей работы). В уравнении (0.1) величина $u(t,x)$ отвечает значению трансмембранного потенциала u нейрона в позиции x нейронного поля Ξ в момент времени t; $\tau > 0$ задает скорость процессов динамики электрических потенциалов нейронного поля; функции ω и f определяют вероятностную силу связи нейронов, зависящую от их удаленности, и вероятность активации $f(u)$ нейрона u при трансмембранном потенциале $u(t,x)$, соответственно. В наиболее подробно исследованном одномерном варианте уравнения (0.1) ($\Xi = \mathbb{R}$) функция межнейронной связи ω стандартно задается четной функцией, положительная ветвь которой является линейной комбинацией экспоненциально убывающих функций. Типичные способы задания функции активации f можно обобщить, например, следующим образом:

$$f(u) = \begin{cases} 0,\ u < u^0, \\ \varphi(u),\ u \in [u^0, u^1], \\ 1,\ u > u^1, \end{cases} \tag{0.2}$$

где $0 < u^0 < u^1$, а функция φ непрерывна, не убывает и удовлетворяет условиям $\varphi(u^0) = 0$, $\varphi(u^1) = 1$.

В исследовании стационарных решений (0.1) преобладает подход, заключающийся в замене функции f функцией Хевисайда

$$H(u) = \begin{cases} 0,\ u < \theta, \\ H_\theta \in \{0, 1/2, 1\},\ u = \theta, \\ 1,\ u > \theta, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $\theta \in (u^0, u^1)$, в предположении того, что из сходимости $u^1 - u^0 \to 0$ должна следовать сходимость соответствующих решений к решению (0.1) при $f = H$ (см, например, работы [1, 2] и приведенную в них библиографию). Однако, как было показано в [1, 2], установление вышеупомянутой сходимости решений достаточно нетривиально и требует доказательства в каждом рассматриваемом случае.

Для $\Xi = \mathbb{R}$ и $f = H$ наиболее изученными являются стационарные симметричные относительно прямой $x = 0$ решения (0.1) типов «одиночный бамп» (U^1) и «двойной бамп» (W^1), обладающие свойствами

$$U^1(x) \geq \theta \ \Leftrightarrow \ x \in [-a, a],\ a > 0,$$

и

$$W^1(x) \geq \theta \ \Leftrightarrow \ x \in [-b, -a] \cup [a, b],\ b > a > 0,$$

соответственно (см., например, статьи [3–6] и обзор [7]). Исследования решений данных типов, соответствующих непрерывным функциям активации нейронов типа (0.2), гораздо менее многочисленны (см. [8–11]). Среди этих работ следует выделить статьи [10,11], в которых доказывается, что условие $u^1 - u^0 \to 0$ обеспечивает сходимость решений U^1 и W^1 уравнения (0.1) к соответствующим решениям (0.1) в случае $f = H$.

При рассмотрении двумерного варианта уравнения (0.1) (т. е. отвечающего случаю $\Xi = \mathbb{R}^2$), функция межнейронной связи ω, как правило, предполагается радиально симметричной, имеющей в качестве образующей $\omega(|\cdot|)$ линейную комбинацию экспоненциально убывающих функций. Типично исследуются, соответственно, радиально симметричные аналоги U^2 и W^2 решений U^1 и W^1, имеющие названия «бамп» и «кольцо». Изучению бампов и колец в случае $\Xi = \mathbb{R}^2$ и $f = H$ посвящены работы [12,13]. Условия существования решений-бампов для функции f вида (0.2), а также непрерывная зависимость таких решений при переходе от f к H получены в работах [14,15]. Основным объектом настоящего исследования являются стационарные радиально симметричные решения типа «кольцо» двумерных уравнений нейронного поля (0.1) ($\Xi = \mathbb{R}^2$). В настоящей работе приводятся условия существования решений-колец как для функции Хевисайда (0.3), так и для непрерывных функций активации нейронов, а также условия, гарантирующие непрерывный переход между этими решениями при сходимости $u^1 - u^0 \to 0$.

1. Основные результаты

Полагая $x \in \mathbb{R}^2$, имеющим компоненты $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, где $r \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, представим решение-бамп радиуса $a > 0$ в явном виде следующим образом (см., например, [12,15]):

$$U^2(r) = 2\pi a \int_0^\infty \widehat{\omega}(\varrho) J_0(r\varrho) a J_1(a\varrho)\Big) d\varrho,$$

где $\widehat{\omega}$ — преобразование Ханкеля функции ω, J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν ($\nu \in \mathbb{N}$). Решение-кольцо в данном случае может быть записано в виде разности бампа радиуса $b > 0$ и бампа радиуса a, $b > a > 0$ (см., например, [13]):

$$W^2(r) = 2\pi \int_0^\infty \widehat{\omega}(\varrho) J_0(r\varrho) \Big(b J_1(b\varrho) - a J_1(a\varrho) \Big) d\varrho. \tag{1.1}$$

Приведем определение решения-кольца, с которым будем работать всюду ниже.

О п р е д е л е н и е 1.1. Зафиксируем $\theta > 0$, $b > a > 0$. *Решением типа «кольцо»* внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a уравнения (0.1) ($\Xi = \mathbb{R}^2$) назовем гладкую функцию $W^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), удовлетворяющую уравнению (0.1) при $\Xi = \mathbb{R}^2$ и обладающую следующими свойствами:

- $W^2(x) \equiv W^2(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x = |x| \exp(i\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $W^2(x) = \theta$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = a\} \cup \{x \in \Xi,\ |x| = b\}$;
- $W^2(x) > \theta \ \Leftrightarrow\ a < |x| < b$.

Решение W^2 типа «кольцо» назовем *правильным*, если $W^{2\prime}(x) \neq 0$ при всех $x \in \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = a\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = b\}$.

Определим при помощи функции (0.2) семейство функций $f_i : \mathbb{R} \to [0,1]$, полагая

$$f_i(u) = \begin{cases} 0,\ u < u_i^0, \\ \varphi(u),\ u \in [u_i^0, u_i^1], \\ 1,\ u > u_i^1, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $u_i^0 \nearrow \theta \swarrow u_i^1$ при $i \to \infty$. Тогда, очевидно, $f_i \to f_\infty = H$ по мере на $\mathbb{R}$. Будем обозначать соответствующие решения уравнения (0.1) типа «правильное кольцо» через W_i^2 и W_∞^2 (в том случае, если они существуют).

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть образующая функция $\omega(|\cdot|) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ радиально симметричной функции межнейронной связи ω является суммируемой дважды непрерывно дифференцируемой функцией, такой что*

$$\int_0^\infty |\widehat{\omega}(r)| r^2 dr < \infty. \tag{1.3}$$

Пусть также имеют место неравенства

$$\int_0^\infty \widehat{\omega}(r)\Big(J_0(\xi r)J_1(\xi r) + \tfrac{\xi r}{2}\big(J_0^2(\xi r) - 2J_1^2(\xi r) - J_0(\xi r)J_2(\xi r)\big)\Big)dr \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\int_0^\infty \widehat{\omega}(r)J_0(\cdot\, r)\Big(J_1(\xi r) + \tfrac{\xi r}{2}\big(J_0(\xi r) - J_2(\xi r)\big)\Big)dr \not\equiv 0, \tag{1.5}$$

при $\xi = a, b$. Пусть, наконец, выполнено

$$(1 + \tfrac{\mathcal{X}(b)}{\mathcal{Y}(b)})\tfrac{\mathcal{X}(a)}{\mathcal{Y}(b)} - \tfrac{\mathcal{X}(b)}{\mathcal{Y}(a)} - \tfrac{\mathcal{X}(a)\mathcal{X}(b)}{\mathcal{Y}(a)\mathcal{Y}(b)} \neq 1, \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{X}(\xi) = \int_0^\infty \widehat{\omega}(r)J_0(\xi, r)\Big(J_1(\xi r) + \tfrac{\xi r}{2}\big(J_0(\xi r) - J_2(\xi r)\big)\Big)dr,$$

$$\mathcal{Y}(\xi) = \int_0^\infty \widehat{\omega}(r) r J_1(\xi r)\big(aJ_1(ar) - bJ_1(br)\big)dr.$$

Тогда если существует решение W_∞^2 уравнения (0.1) при $\Xi = \mathbb{R}^2$, то найдутся такие $R \gg b$ и $N \in \mathbb{N}$, что для всех $i > N$ существуют решения W_i^2 уравнения (0.1) при $\Xi = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| \le R\}$. Кроме того, имеет место сходимость

$$\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^2,\ |x|\le R} |W_i^2(x) - W_\infty^2(x)| \to 0, \\ \max\limits_{x\in\mathbb{R}^2,\ |x|\le R} |W_i^{2\prime}(x) - W_\infty^{2}{}'(x)| \to 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

при $i \to \infty$.

Доказательство данного утверждения основывается на использовании теорем 2.1 и 2.2 работы [14] для исследования решений (в смысле определения 1.1) уравнения (0.1). Выполнение условий (1.4)–(1.6) и существование решения W^2_∞ проверяются численно.

Гарантируемая соотношениями (1.7) сходимость позволяет трактовать условия предложения 1 в качестве условий, допускающих приближенное численное отыскание решений типа «кольцо» уравнения статистической физики (0.1) в случае $\Xi = \mathbb{R}^2$.

Проиллюстрируем применение предложения 1, используя следующую типичную функцию межнейронной связи:

$$\omega(x) = \frac{1}{4\pi}\exp(-|x|) - \frac{1}{8\pi}\exp(-\frac{|x|}{2}) \tag{1.8}$$

(см., например, [6, 12, 13, 15]). Условие существования решения-кольца W^2_∞, имеющего внешний радиус b и внутренний радиус a, записывается следующим образом [13]:

$$W^2_\infty(b) = W^2_\infty(a) = \theta,\ b > a > 0, \tag{1.9}$$

где $W^2_\infty(r)$ имеет вид (1.1). Результат проверки условия (1.9) в случае (1.8) представлен на рис. 1. Подобно случаю решений-бампов (подробнее см. [6, 15]), при высоких

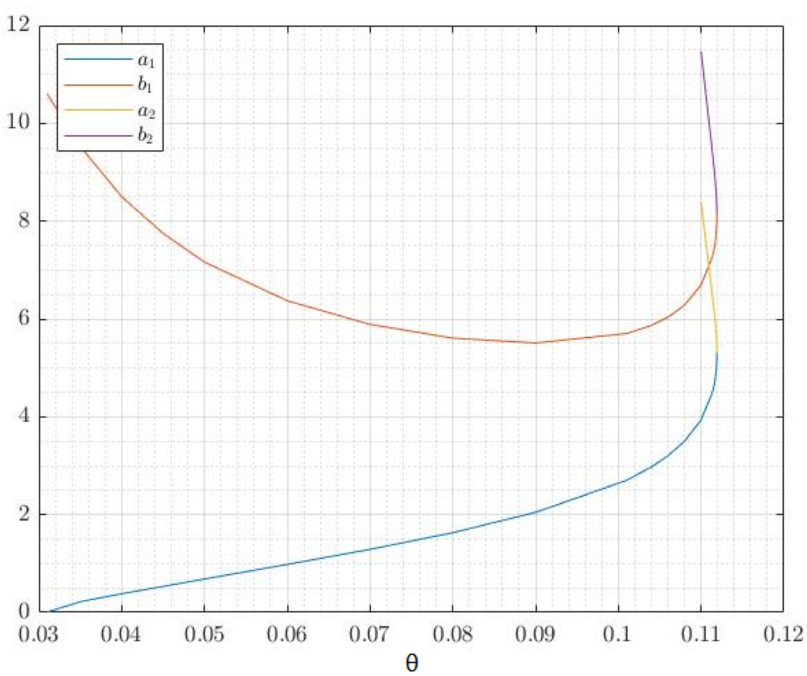

Рис. 1. Значения внутреннего и внешнего радиусов решений-колец, удовлетворяющих (1.9) при заданных порогах θ активации функции (0.3). Ветви a_1 и b_1 отвечают так называемому «широкому кольцу», ветви a_2 и b_2 – «узкому кольцу»

значениях порога функции активации наблюдается сосуществование двух решений — так называемых «широкого» и «узкого» решений-колец. Графики, отражающие зависимость радиальных образующих данных решений от порога θ функции активации (0.3) и являющихся приближениями соответствующих решений-колец W^2_i при сходимости $u^0_i \nearrow \theta \swarrow u^1_i$ $(i \to \infty)$ в (1.2), представлены на рис. 2 и 3.

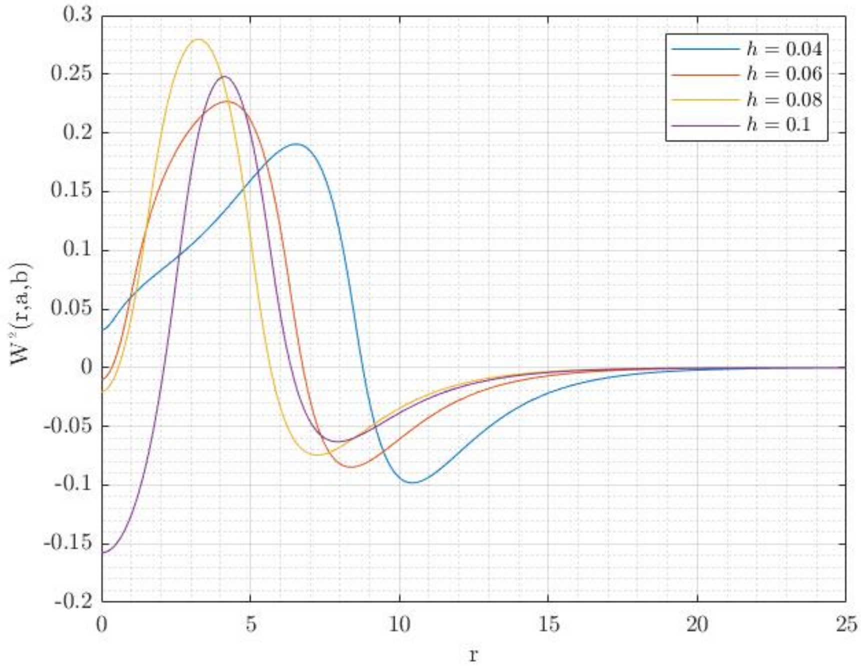

Рис. 2. Профили радиальных образующих «широкого кольца» в зависимости от порога θ функции активации (0.3)

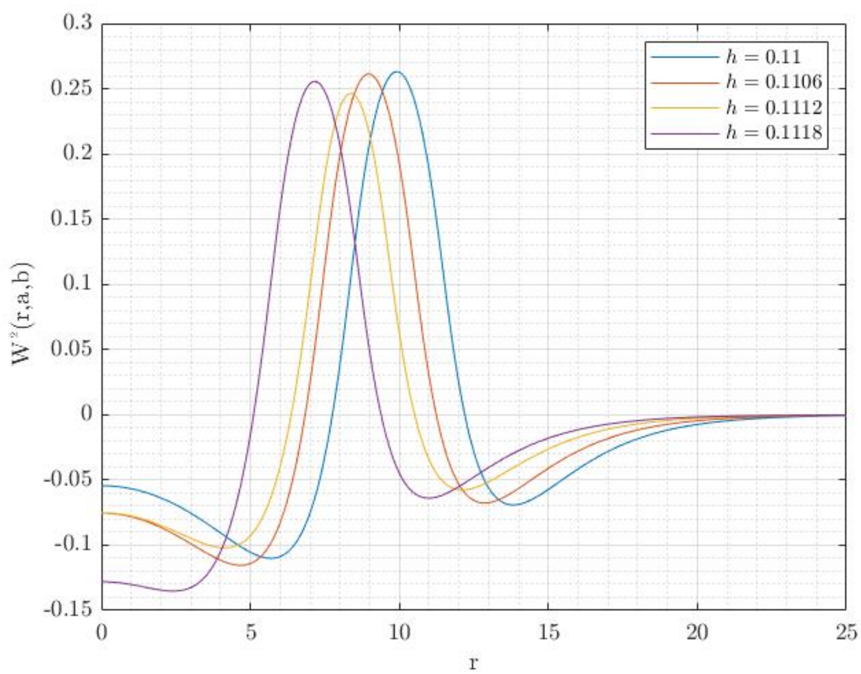

Рис. 3. Профили радиальных образующих «узкого кольца» в зависимости от порога θ функции активации (0.3)

References

[1] E. Burlakov, “On inclusions arising in neural field modeling”, *Differential Equations and Dynamical Systems*, **29** (2021), 765–787.

[2] E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, “On Continuous and Discontinuous Models of Neural Fields”, *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:3 (2021), 272–282.

[3] S. Amari, “Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields”, *Biological Cybernetics*, **27** (1977), 77–87.

[4] C. R. Laing, W. C. Troy, “Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **178** (2003), 190–218.

[5] C. R. Laing, W. C. Troy, B. Gutkin, G. B Ermentrout, “Multiple bumps in a neuronal network model of working memory”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63** (2002), 62–97.

[6] S. Coombes, “Waves, bumps, and patterns in neural field theories”, *Biological Cybernetics*, **93** (2005), 91–108.

[7] P. Bressloff, “Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2011), 033001.

[8] C. R. Laing, W. C. Troy, “PDE methods for non-local models”, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **2**:3 (2003), 487–516.

[9] S. Kishimoto, S. Amari, “Existence and stability of local excitations in homogeneous neural fields”, *Journal of Mathematical Biology*, **7** (1979), 303–318.

[10] A. Oleynik, A. Ponosov, J. Wyller, “On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models”, *Journal Mathematical Analysis and Application*, **398** (2013), 398–351.

[11] E. Burlakov, J. Wyller, A Ponosov, “Stationary solutions of continuous and discontinuous neural field equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**:1 (2016), 47–68.

[12] S. E. Folias, P. C. Bressloff, “Breathers in two-dimensional neural media”, *Physical Review Letters*, **95** (2005), 208107.

[13] M. R. Owen, C. R. Laing, S. Coombes, “Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities”, *New Journal of Physics*, **9** (2007), 378.

[14] Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина, “О связи непрерывных и разрывных меделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 17–30. [E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina, “On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: I. General theory”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 17–30 (In Russian)].

[15] Е. О. Бурлаков, И. Н. Мальков, “О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 6–17. [E. O. Burlakov, I. N. Malkov, “On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D (“bumps”)”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 6–17 (In Russian)].

Информация об авторах

Атмания Рашид, аспирант, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: atmania.rachid@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Information about the authors

Rachid Atmania, Post-Graduate Student. Institute of Mathematics and Computer Science. Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: atmania.rachid@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Бурлаков Евгений Олегович, PhD, научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Research and Educational Center "Fundamental Mathematical Research". Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, студент, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Ivan N. Malkov, Student. Institute of Mathematics and Computer Science. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.
Поступила после рецензирования 18.10.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Received 02.09.2021
Reviewed 18.10.2021
Accepted for press 27.11.2021